

双四元数矢量传感器阵列模型和电磁源定位

李 旦, 蒋景飞, 张建秋

(复旦大学电子工程系, 上海 200433)

摘 要: 从四元数形式的麦克斯韦方程组的角度出发为电磁矢量传感器阵列建立了纯双四元数模型(PB-MODEL). 理论分析表明采用双四元数框架下的数据协方差矩阵可以去除每个电磁矢量传感器内部的电场天线或者磁场天线噪声的相关性,使得相应的纯双四元数多重信号分离算法(PB-MUSIC)可以扩展到相关噪声的场合. 实验仿真结果证明了该算法和理论分析的正确性.

关键词: 双四元数; 电磁矢量传感器; 矢量传感器阵列; 电磁源定位

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 09-1997-07

Biquaternion Vector-Sensor Array Model and Electromagnetic Source Localization

LI Dan, JIANG Jing-fei, ZHANG Jian-qiu

(Electronic Engineering Department of Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: Based on the quaternion formulation of Maxwell equations, a pure biquaternion model (PB-MODEL) for electromagnetic vector-sensor array is proposed. Theoretical analysis shows that the pure biquaternion data covariance matrix can decorrelate the coherent noise among the electric or magnetic antennas of a vector-sensor. As a result, the corresponding pure biquaternion multiple signals classification algorithm (PB-MUSIC) can be extended to coherent noise cases. Numerical simulation verifies the correctness of our algorithm and the analytical results.

Key words: biquaternion; electromagnetic vector-sensor; vector-sensor array; electromagnetic source localization

1 引言

每个电磁矢量传感器包含一组电场天线和一组磁场天线,并且天线对信号的极化信息是敏感的^[1-5]. 和传统的标量传感器相比^[6,7],电磁矢量传感器可以记录三维空间中电磁波携带的所有信息. 这使得电磁矢量传感器阵列在空间源定位等方面具有比传统的标量传感器阵列更高的精度^[1]. 但也正是由于电磁矢量传感器包含的信息更全面,使得其相应的模型和信号处理也更加复杂. 因此,有必要研究新的、高效的基于电磁矢量传感器的阵列建模和信号处理方法.

2 相关工作

在过去的二十年中,围绕电磁矢量传感器阵列的建模和信号处理方法,很多学者做出了大量的研究. Nehorai 和 Paldi 最早从实数域麦克斯韦方程组的角度出发提出了一个物理意义明确的电磁矢量传感器阵列模型^[1]. 该

模型把矢量传感器每个天线接收的信号排成一个 6×1 维的矢量,然后把阵列中不同传感器的输出排列成一个更长的矢量,所以这个模型也被称为长矢量模型(LV-MODEL). 基于 LV-MODEL,各种电磁源定位的算法得到了广泛的发展. 文献[1]给出了估计单个电磁源波达方向(DOA)的叉乘算法;文献[2]讨论了源定位的自初始化多重信号分离(Self-initiating MUSIC)算法;文献[3]介绍了极化平滑的多重信号分离(PSA-MUSIC)算法;文献[4]研究了对应的求根多重信号分离(ROOT-MUSIC)算法;文献[5]描述了基于电磁矢量传感器阵列的旋转不变(ES-PRIT)算法;文献[8]从张量的角度给出了 DOA 估计的双模 MUSIC 算法. 但由于文献[1]中的建模方法是把每个矢量传感器中各个天线的输出直接排列,矢量传感器输出数据的“矢量”特性没有得到保留,所以 LV-MODEL 并不是最合理的. 因此,对应于 LV-MODEL 的各种源定位方法^[1-5,8]也不一定是最优的.

为了保留矢量传感器输出数据的矢量特性,近年

来很多学者采用一些多维的代数系统作为工具进行建模.文献[9]首次用四元数对二元输出的矢量传感器建模,并给出了相应的源定位方法——四元数多重信号分离(Q-MUSIC)算法.文献[10]又进一步采用双四元数来对三元的矢量传感器建模并讨论了相应的双四元数多重信号分离(BQ-MUSIC)算法.为完整地描述每个电磁矢量传感器输出的6维信号,文献[11]利用四四元数(Quad-Quaternion)来表示每个矢量传感器的输出,建立了四四元数的阵列信号模型,并给出了相应的四四元数多重信号分离算法(QQ-MUSIC).相比于传统的长矢量类方法^[1~5],文献[9~11]的分析表明采用四元数或者双四元数的处理办法可以大大减少阵列输出数据协方差矩阵的计算量和存储空间.文献[10]还通过仿真实验验证了BQ-MUSIC算法比传统的长矢量多重信号分离(LV-MUSIC)算法在抵抗相关噪声方面具有更好的鲁棒性.但是文献[9,10]的建模方法直接用一个四元数或者双四元数的不同虚部来对应每个矢量传感器中不同天线的输出,这样的建模方法缺乏明确的物理意义.

为了寻找一个具有明确物理意义并且尽可能保留电磁矢量传感器输出数据矢量特性的模型,本文从四元数形式的麦克斯韦方程组的角度出发,为电磁矢量传感器阵列建立一个纯双四元数模型(PB-MODEL),并给出相应的纯双四元数多重信号分离(PB-MUSIC)算法.我们从理论上分析了PB-MUSIC算法比传统算法具有更好的抵抗相关噪声鲁棒性的原因,并从理论上证明了PB-MUSIC算法可以去除每个矢量传感器内部的电场天线或者磁场天线对应噪声的相关性.最后,本文通过仿真实验验证了新模型和算法的正确性和有效性.

3 纯双四元数电磁矢量传感器阵列模型

本节首先引入四元数形式的麦克斯韦方程组^[12~16],然后建立具有明确物理意义的纯双四元数阵列模型.四元数和双四元数代数最早由Hamilton提出,近几年来四元数在信号处理中得到了广泛的应用^[9,10,14,15].本文中分别采用 \mathbf{R} 、 \mathbf{C} 、 H 、 H_C 表示实数域、复数域、四元数域、双四元数域,用 i, j, k 表示四元数的三个虚部符号,用 I 表示复数的虚部符号.

3.1 四元数形式的麦克斯韦方程组

令 (x, y, z) 表示三维空间中的一个正交坐标系.用 i, j, k 表示四元数的三个虚部符号,由于 x, y, z 方向上的单位矢量之间的内积和外积的关系与 i, j, k 之间的内积和外积的定义是相符的^[15],所以可建立从三维空间中的任意一点 (a_x, a_y, a_z) 到纯四元数空间中的一个映射:

$$(a_x, a_y, a_z) \rightarrow a_x i + a_y j + a_z k \quad (1)$$

即用 $a = a_x i + a_y j + a_z k$ 来对应三维空间中的 $(a_x, a_y,$

$a_z)$.和矢量分析相似,定义四元数形式的Hamilton算子^[17,18]为:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

式(2)和矢量分析中的Hamilton算子一样具有外积和内积的运算,另外每个虚部之间还满足四元数的运算规则.

根据上面的表述,三维空间中位于 (x, y, z) 上的电场信号 E 和磁场信号 H 可分别对应到两个纯四元数:

$$E = E_x i + E_y j + E_z k \quad (3)$$

$$H = H_x i + H_y j + H_z k \quad (4)$$

假设电磁波在不导电的,各向同性的,均匀的介质中传播,那么四元数形式的麦克斯韦方程组^[17,18]可以表示为:

$$\nabla E = -\nabla \cdot E + \nabla \times E = -\frac{\rho}{\zeta} - \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla H = -\nabla \cdot H + \nabla \times H = 0 + \zeta \frac{\partial E}{\partial t} \quad (6)$$

其中 ζ 和 μ 分别为介质的介电常数和磁导率, ρ 表示场源参数, \times 表示四元数或双四元数的叉乘.

3.2 单电磁源单矢量传感器模型

如图1所示,假定一个远场窄带的空间电磁源以方位角 θ_1 和俯仰角 θ_2 向位于坐标原点的一个矢量传感器发射电磁波.那么可以用如下的定理1、2来描述单电磁源单矢量传感器情况下的测量模型:

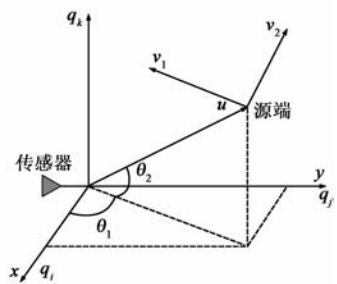


图1 单矢量传感器单发射源模型

定理1 令 $(y_{E_x}, y_{H_x}), (y_{E_y}, y_{H_y}), (y_{E_z}, y_{H_z}) \in \mathbf{C}$ 分别表示矢量传感器 x, y, z 方向接收到的电场信号和磁场信号的复包络^[19].如果用两个双四元数

$$y_E(t) = y_{E_x}(t)i + y_{E_y}(t)j + y_{E_z}(t)k \in H_C \quad (7)$$

$$y_H(t) = y_{H_x}(t)i + y_{H_y}(t)j + y_{H_z}(t)k \in H_C \quad (8)$$

分别表示传感器收到的电场信号和磁场信号,那么单电磁源单传感器情况下的测量模型可以表示成

$$y_E(t) = \varepsilon(t) + n_E(t) \quad (9)$$

$$y_H(t) = u \times \varepsilon(t) + n_H(t) \quad (10)$$

其中 $\varepsilon(t) = \varepsilon_x(t)i + \varepsilon_y(t)j + \varepsilon_z(t)k \in H_C$ 表示没有噪声情况下传感器收到的电场信号复包络; $n_E(t), n_H(t)$ 表示电场和磁场的测量噪声; u 表示电磁波传播反方向的单位纯四元数(如图1所示),可写成

$$u = \cos\theta_1 \cos\theta_2 i + \sin\theta_1 \cos\theta_2 j + \sin\theta_2 k \quad (11)$$

证明 令 κ 代表电磁波传播方向的单位纯四元数,那么 $\kappa = -u$.在远场假设下,三维空间中的任意一

点 (r_x, r_y, r_z) 可以映射成四元数 $r = r_x i + r_y j + r_z k$, 在该位置上的电场和磁场信号可以表示成:

$$E(r, t) = E(0, t - \tau), H(r, t) = H(0, t - \tau) \quad (12)$$

其中 $\tau = (\kappa \cdot r)/c$ 表示从坐标原点到 r 的传输延迟; $c = (\zeta\mu)^{-0.5}$ 为电磁波的传播速度. 式(12)说明对于平面波, 三维空间中不同位置的电磁信号之间只存在相位差. 假定在坐标原点处 t 时刻的电磁信号为 $E_0 = E(0, t)$ 和 $H_0 = H(0, t)$, 那么有 $E(r, t) = E_0(t - \tau)$ 和 $H(r, t) = H_0(t - \tau)$. 因而对于平面波, Hamilton 算子式(2)就变成 $-(\kappa/c)(\partial/\partial t)$. 那么式(5)和式(6)描述的麦克斯韦方程组转化为:

$$\frac{\kappa}{c} \cdot \dot{E}_0 - \frac{\kappa}{c} \times \dot{E}_0 = -\frac{\rho}{\zeta} - \mu \dot{H}_0 \quad (13)$$

$$\frac{\kappa}{c} \cdot \dot{H}_0 - \frac{\kappa}{c} \times \dot{H}_0 = 0 + \zeta \dot{E}_0 \quad (14)$$

其中 $\dot{E}_0 = dE_0/dt$ 和 $\dot{H}_0 = dH_0/dt$. 式(14)表明 $\kappa, \dot{E}_0, \dot{H}_0$ 三个纯四元数相互正交, 因而得到式(13)中的 $\rho = 0$. 则式(13)和式(14)分别等价于:

$$\kappa \cdot \dot{E}_0 + \kappa \times \dot{E}_0 = 0 + \eta \dot{H}_0 \quad (15)$$

$$\kappa \cdot \dot{H}_0 + \kappa \times \dot{H}_0 = 0 - \dot{E}_0 \quad (16)$$

其中 $\eta = (\mu/\zeta)^{0.5}$ 表示介质的本征阻抗^[1]. 显然, 式(15)和式(16)是等价的. 这说明对于平面波, 麦克斯韦方程组就变成了式(15)或式(16)其中之一. 对式(15)两边同时积分得到:

$$\kappa \cdot E_0 + \kappa \times E_0 = 0 + \eta H_0 + c \quad (17)$$

由文献[1]可知对于平面电磁波式(17)中的常数项 $c = 0$. 如果定义 E_0 和 H_0 的复包络分别为 $\epsilon(t)$ 和 $h(t)$, 即:

$$\epsilon(t) = 2e^{-i\omega_c t} (E_{0x} + i + E_{0y} + j + E_{0z} + k) \quad (18)$$

$$h(t) = 2e^{-i\omega_c t} (H_{0x} + i + H_{0y} + j + H_{0z} + k) \quad (19)$$

其中 ω_c 表示载波频率, $E_{0x}, E_{0y}, E_{0z}, H_{0x}, H_{0y}, H_{0z}$ 分别对应 E_0 和 H_0 各分量的正频率部分. 注意到 $\kappa = -u$, 那么在远场窄带电磁源假设下的麦克斯韦方程组可以表示为:

$$u \cdot \epsilon(t) + u \times \epsilon(t) = -\eta h(t) \quad (20)$$

根据传感器输出的定义式(7)和式(8), 对式(20)两边同时乘以一个固定常数^[1], 定理1即可证明.

定理 2 在考虑源的极化参数的情况下(如图 2 所示), 传感器收到的无噪声的电场信号复包络可表示成:

$$\epsilon(t) = [v_1 \quad v_2] Q W x(t) \quad (21)$$

其中

$$v_1 = -\sin\theta_{11}i + \cos\theta_{11}j \quad (22)$$

$$v_2 = -\cos\theta_{11}\sin\theta_{12}i - \sin\theta_{11}\sin\theta_{12}j + \cos\theta_{12}k \quad (23)$$

Q 为从入射电磁波的主轴到由 v_1 和 v_2 确定的平面的

旋转矩阵^[1], 可以表示为:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & \sin\theta_3 \\ -\sin\theta_3 & \cos\theta_3 \end{bmatrix}, \theta_3 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (24)$$

W 表示从天线到介质的归一化传导矢量^[1](如图 2 所示), 表示为:

$$W = \begin{bmatrix} \cos\theta_4 \\ i\sin\theta_4 \end{bmatrix}, \theta_4 \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \quad (25)$$

$x(t)$ 表示源发射信号的复包络.

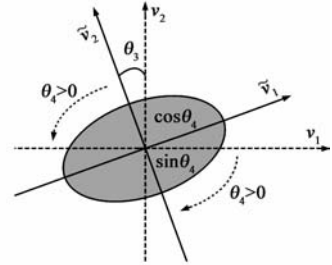


图2 电场极化椭圆

证明 由文献[1]中的式(2.7)和引理 2.1 可直接得到结论.

根据定理 1 和定理 2, 单发射源单矢量传感器情况下的测量模型可以表示为:

$$y_{EH}(t) = \begin{bmatrix} y_E(t) \\ y_H(t) \end{bmatrix} = V Q W x(t) + n_{EH}(t) \quad (26)$$

其中四元数矩阵 V 可以表示成:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ u \times v_1 & u \times v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$n_{EH}(t) = [n_E(t) \quad n_H(t)]^T$ 为传感器的测量噪声, T 表示(四元数)矩阵的转置.

3.3 多个发射源的电磁矢量传感器阵列模型

考虑三维空间中的 L 个远场窄带电磁源入射到由 M 个矢量传感器构成的阵列上. 假定阵列中第 m 个矢量传感器在三维空间中的坐标为 (m_x, m_y, m_z) , 其对应的四元数为 $p_m = m_x i + m_y j + m_z k$, 若第 l 个源以方位角 θ_{l1} , 俯仰角 θ_{l2} , 极化参数角 θ_{l3}, θ_{l4} 入射到阵列上, 那么第 l 个源到阵列中第 m 个传感器的空间相位因子^[2-5]可表示成:

$$d_{lm} = e^{i_{2\pi} p_m \cdot u_l} \quad (28)$$

其中 λ 表示电磁波的波长, \cdot 表示四元数的内积, u_l 表示第 l 个源的电磁波传播方向的反方向. 式(28)建立在双四元数的框架下, 单由于 I 具有和复数虚部相同的运算法则^[10], 它和传统的复数域空间相位因子具有相同的物理解释, 即描述电磁波信号的相位延迟. 类似于式(11), u_l 可以表示为:

$$u_l = \cos\theta_{l1}\cos\theta_{l2}i + \sin\theta_{l1}\cos\theta_{l2}j + \sin\theta_{l2}k \quad (29)$$

对应于式(26), 如果分别定义 $y_{EH}^{(m)}(t)$, $n_{EH}^{(m)}(t)$ 为第 m

个传感器接收到的信号和测量噪声,那么可以用下面的两个双四元数矢量来表示整个阵列的输出和测量噪声:

$$\mathbf{Y}_{\text{EH}}(t) = [(\mathbf{y}_{\text{EH}}^{(1)}(t))^T \quad (\mathbf{y}_{\text{EH}}^{(2)}(t))^T \quad \cdots \quad (\mathbf{y}_{\text{EH}}^{(M)}(t))^T]^T \quad (30)$$

$$\mathbf{N}_{\text{EH}}(t) = [(\mathbf{n}_{\text{EH}}^{(1)}(t))^T \quad (\mathbf{n}_{\text{EH}}^{(2)}(t))^T \quad \cdots \quad (\mathbf{n}_{\text{EH}}^{(M)}(t))^T]^T \quad (31)$$

根据式(26)和叠加原理,多发射源的阵列模型可以表示成:

$$\mathbf{Y}_{\text{EH}}(t) = \sum_{l=1}^L [\mathbf{D}_l \otimes (\mathbf{V}_l \mathbf{Q}_l \mathbf{W}_l)] x_l(t) + \mathbf{N}_{\text{EH}}(t) \quad (32)$$

其中 \mathbf{Q}_l , \mathbf{V}_l , \mathbf{W}_l 的定义类似于式(24)、(25)、(27),但相应的方位角、俯仰角和极化参数角是第 l 个源的; \otimes 为 Kronecker 积; $x_l(t)$ 是第 l 个源发射的信号; \mathbf{D}_l 为第 l 个源对整个阵列的相位矢量^[2~5],可表示为:

$$\mathbf{D}_l = [d_{l1} \quad d_{l2} \quad \cdots \quad d_{lM}]^T \quad (33)$$

如果令 $\mathbf{a}(\theta_l) = \mathbf{D}_l \otimes (\mathbf{V}_l \mathbf{Q}_l \mathbf{W}_l)$, $\theta_l = [\theta_{l1} \quad \theta_{l2} \quad \theta_{l3} \quad \theta_{l4}]^T$, 那么式(32)可以等效的表示为:

$$\mathbf{Y}_{\text{EH}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{X}(t) + \mathbf{N}_{\text{EH}}(t) \quad (34)$$

其中 $\mathbf{A} = [a(\theta_1) \quad a(\theta_2) \quad \cdots \quad a(\theta_L)]$,

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_L(t)]^T.$$

式(34)即为用纯双四元数描述的电磁矢量传感器阵列的测量模型(PB-MODEL).

4 纯双四元数模型的协方差矩阵

本节首先给出 PB-MODEL 下的协方差矩阵的定义,然后给出协方差矩阵对相关噪声的鲁棒性分析.在下面的讨论中,为了简化符号,各个信号关于时间 t 的表示将被省略.

4.1 协方差矩阵

类似于文献[9]和[10]中的定义,可定义 PB-MODEL 下阵列输出数据的协方差矩阵为:

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{E}\{\mathbf{Y}_{\text{EH}} \mathbf{Y}_{\text{EH}}^*\} \quad (35)$$

其中 $*$ 表示双四元数矢量的全共轭转置^[10], $\mathbf{E}\{\cdot\}$ 表示数学期望.假定信号和噪声不相关,则式(35)可以进一步表示为:

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{A} \mathbf{E}\{\mathbf{X} \mathbf{X}^*\} \mathbf{A}^* + \mathbf{E}\{\mathbf{N}_{\text{EH}} \mathbf{N}_{\text{EH}}^*\} = \mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{A}^* + \mathbf{R}_n \quad (36)$$

其中 \mathbf{R}_x 和 \mathbf{R}_n 分别表示源信号和噪声信号的协方差矩阵.

在对源的波达方向进行估计时,传统的 MUSIC 和 ESPRIT 算法都要求噪声的协方差矩阵 \mathbf{R}_n 为一个对角元素相等的实对角阵,也就是要求测量噪声是一个不相关的多维随机过程.而下一小节的分析将表明,无论每个传感器的电场噪声或者磁场噪声是否相关,在双四元数框架下的噪声协方差矩阵都是一个对角阵.

4.2 相关噪声的鲁棒性分析

在长矢量的情况下,第 m 个矢量传感器接收到的电场噪声被表示成如下的复矢量:

$${}^{\text{lv}} \mathbf{n}_E^{(m)} = [n_{E_x}^{(m)} \quad n_{E_y}^{(m)} \quad n_{E_z}^{(m)}]^T \quad (37)$$

其中左上标 lv 表示对应的量属于 LV-MODEL; $n_{E_p}^{(m)} \in \mathbf{C}$, ($p = x, y, z$) 表示第 m 个传感器的 p 方向上的电场天线接收的噪声信号.式(37)对应的噪声的协方差矩阵可表示为:

$$\begin{aligned} {}^{\text{lv}} \mathbf{R}_{E_n}^{(m)} &= \mathbf{E}\{({}^{\text{lv}} \mathbf{n}_E^{(m)}) ({}^{\text{lv}} \mathbf{n}_E^{(m)})^*\} \\ &= \\ &\begin{bmatrix} \mathbf{E}\{n_{E_x}^{(m)}(n_{E_x}^{(m)})^*\} & \mathbf{E}\{n_{E_x}^{(m)}(n_{E_y}^{(m)})^*\} & \mathbf{E}\{n_{E_x}^{(m)}(n_{E_z}^{(m)})^*\} \\ \mathbf{E}\{n_{E_y}^{(m)}(n_{E_x}^{(m)})^*\} & \mathbf{E}\{n_{E_y}^{(m)}(n_{E_y}^{(m)})^*\} & \mathbf{E}\{n_{E_y}^{(m)}(n_{E_z}^{(m)})^*\} \\ \mathbf{E}\{n_{E_z}^{(m)}(n_{E_x}^{(m)})^*\} & \mathbf{E}\{n_{E_z}^{(m)}(n_{E_y}^{(m)})^*\} & \mathbf{E}\{n_{E_z}^{(m)}(n_{E_z}^{(m)})^*\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

其中 $*$ 表示复数的共轭; $\mathbf{E}\{n_{E_p}^{(m)}(n_{E_p}^{(m)})^*\}$, ($p = x, y, z$) 表示噪声三个分量之间的自相关,一般是大于 0 的实数; $\mathbf{E}\{n_{E_p}^{(m)}(n_{E_q}^{(m)})^*\}$, ($p, q = x, y, z; p \neq q$) 记录了不同噪声分量之间的互相关.由于此处噪声为复噪声, $\mathbf{E}\{n_{E_p}^{(m)}(n_{E_q}^{(m)})^*\}$ 一般是复数,通常情况下认为不同复噪声分量的实部和虚部之间是不相关的,那么 $\mathbf{E}\{n_{E_p}^{(m)}(n_{E_q}^{(m)})^*\}$ 将变成大于 0 的实数.

对应于式(37),在双四元数框架下,由式(7)可知第 m 个矢量传感器接收到的电场噪声可以表示为:

$$n_E^{(m)} = n_{E_x}^{(m)} i + n_{E_y}^{(m)} j + n_{E_z}^{(m)} k \in H_{\mathbf{C}} \quad (39)$$

由于式(39)是一个双四元数,式(36)表明由式(39)中噪声二阶统计特性可以用下面的双四元数表示:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{E_n}^{(m)} &= \mathbf{E}\{(n_E^{(m)}) (n_E^{(m)})^*\} \\ &= \left[\mathbf{E}\{n_{E_x}^{(m)}(n_{E_x}^{(m)})^*\} + \mathbf{E}\{n_{E_y}^{(m)}(n_{E_y}^{(m)})^*\} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E}\{n_{E_z}^{(m)}(n_{E_z}^{(m)})^*\} \right] \\ &\quad + \left[\mathbf{E}\{n_{E_x}^{(m)}(n_{E_z}^{(m)})^*\} - \mathbf{E}\{n_{E_z}^{(m)}(n_{E_x}^{(m)})^*\} \right] i \\ &\quad + \left[\mathbf{E}\{n_{E_x}^{(m)}(n_{E_y}^{(m)})^*\} - \mathbf{E}\{n_{E_y}^{(m)}(n_{E_x}^{(m)})^*\} \right] j \\ &\quad + \left[\mathbf{E}\{n_{E_y}^{(m)}(n_{E_z}^{(m)})^*\} - \mathbf{E}\{n_{E_z}^{(m)}(n_{E_y}^{(m)})^*\} \right] k \end{aligned} \quad (40)$$

式(40)中双四元数 $\mathbf{R}_{E_n}^{(m)}$ 的标量部分保留了噪声分量之间的自相关,三个四元数的虚部部分记录噪声分量的互相关的差值.如上所述,当噪声分量的实部和虚部不相关的情况下,有 $\mathbf{E}\{n_{E_p}^{(m)}(n_{E_q}^{(m)})^*\} = \mathbf{E}\{n_{E_q}^{(m)}(n_{E_p}^{(m)})^*\} \in \mathbf{R}$, 那么式(40)中的减法实际上就把噪声的相关性给去除了,或者说把噪声给“白化”了.此时式(40)为一个实数,它仅仅记录了噪声分量的自相关.

通过以上分析可知,对于传感器接收到的磁场噪声信号,式(37)~(40)的结论也是成立的.当考虑整个阵列的噪声时,如果不同的矢量传感器之间的噪声分

量不相关, 同一个矢量传感器内部的电场噪声和磁场噪声也不相关, LV-MODEL 下噪声的协方差矩阵可以表示为:

$${}^{lv}R_n = \begin{bmatrix} {}^{lv}R_{En}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{lv}R_{Hn}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{lv}R_{En}^{(M)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{lv}R_{Hn}^{(M)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{6M \times 6M} \quad (41)$$

式(41)是一个按 6×6 大小分块的分块对角阵. 对应地, 在纯双四元数的模型下的噪声协方差矩阵为:

$$R_n = \begin{bmatrix} R_{En}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{Hn}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{En}^{(M)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{Hn}^{(M)} \end{bmatrix} \in H_C^{2M \times 2M} \quad (42)$$

式(42)是一个双四元数矩阵.

假设 A1: 不同的矢量传感器的噪声分量互不相关, 同一个矢量传感器接收的电场噪声和磁场噪声不相关, 噪声分量的实部和虚部不相关.

由上述分析可知, 在满足假设 A1 的情况下, 式(42)为一个实对角阵. 这说明本文中双四元数的协方差矩阵具有“天然地”去除同一个传感器内部的电场噪声和磁场噪声相关性的能力. 同时由式(40)可知, 在不同的矢量传感器对应的噪声分量相关的情况下(即式(42)中的非对角元素不为 0 的情况下), 式(40)中三个虚部的减法运算可以削弱不同矢量传感器中的噪声分量之间的相关性. 这就是文献[9]中的 BQ-MUSIC 算法比传统的 LV-MUSIC 算法具有更好的抵抗相关噪声鲁棒性的原因. 当然, 在假设 A1 的条件不满足的情况下, 无论是 BQ-MUSIC 还是 LV-MUSIC 二者的性能都将下降, 但本文的处理手段明显地弱化了传统子空间类 DOA 估计方法对测量噪声的不相关的限制.

5 纯双四元数多重信号分离 (PB-MUSIC) 算法

在满足假设 A1 的情况下, 如果假设矢量传感器接收的每个噪声分量的功率均为 σ^2 , 那么式(36)对应的阵列输出的协方差矩阵为:

$$R_y = AR_x A^* + 3\sigma^2 I_{2M} \quad (43)$$

其中 I_{2M} 为 $2M \times 2M$ 的单位阵. 如果源信号的协方差矩阵 R_x 是满秩的, 那么根据双四元数矩阵的特征值分解^[10,12], 式(43)的特征值分解可以表示为:

$$R_y = \sum_{p=1}^L \lambda_p \mathbf{s}_p \mathbf{s}_p^* + \sum_{q=1}^{2M-L} 3\sigma^2 \mathbf{g}_q \mathbf{g}_q^* \quad (44)$$

其中 $\{\lambda_p\} \in \mathbb{R}$, $\{p=1, \dots, L\}$ 为 R_y 中较大的 L 个特征值(实数); $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1 \ \dots \ \mathbf{s}_L]$ 包括较大的 L 个特征值对应的特征向量; $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1 \ \dots \ \mathbf{g}_{2M-L}]$ 包括较小的 $2M-L$ 个特征值对应的特征向量. 和传统的多重信号分离算法^[6,7]相似, 由文献[10]中的双四元数多重信号分离算法有:

$$\mathbf{A}^* \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (45)$$

式(45)即表达了双四元数空间中的信号子空间和噪声子空间的正交性.

在实际情况下, 接收数据的协方差矩阵通常采用下式估计:

$$\tilde{R}_y = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{Y}_{EH}(t) \mathbf{Y}_{EH}^*(t) \quad (46)$$

按式(44)中特征值的大小排列可以得到 \tilde{R}_y 的特征分解为:

$$\tilde{R}_y = \sum_{p=1}^L \lambda_p \tilde{\mathbf{S}}_p \tilde{\mathbf{S}}_p^* + \sum_{q=1}^{2M-L} \lambda_q \tilde{\mathbf{g}}_q \tilde{\mathbf{g}}_q^* \quad (47)$$

令 $\tilde{\mathbf{G}} = [\tilde{\mathbf{g}}_1 \ \dots \ \tilde{\mathbf{g}}_{2M-L}]$, 则实际情况下的 PB-MUSIC 算法为寻找以下函数的峰值点:

$$F_{PB}(\theta_l) = \frac{1}{\|\mathbf{a}(\theta_l)^* \tilde{\mathbf{G}}\|^2} \quad (48)$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示双四元数矢量的模长(l_2 范数)^[9].

需要指出, 由于采用了文献[10]中的 BQ-MUSIC 算法的原理, PB-MUSIC 算法和 BQ-MUSIC 一样无法估计电磁源的极化参数. 所以它们只能用在已知电磁源极化参数或极化参数被事先估计的场合. 如果消除极化参数对 DOA 估计的影响, 可以采用类似于文献[11]中瑞利准则解耦极化和角度估计的方法.

6 仿真结果

这部分给出本文的 PB-MUSIC 算法的计算机仿真结果, 并和传统的 LV-MUSIC 算法进行比较. 实验中采用的是一个由电磁矢量传感器构成的均匀线阵. 传感器位于三维空间中的 x 轴上, 相邻两个传感器之间的间隔为 0.3 倍入射电磁波波长.

第一个实验验证 PB-MUSIC 算法的正确性. 假设空间中有 3 个不相关的等功率电磁源入射到由 5 个矢量传感器构成的阵列上. 为方便画出 PB-MUSIC 的空间谱, 假定这 3 个电磁源极化参数相同, 均为 $\theta_3 = 0.2\text{rad}$, $\theta_4 = 0.3\text{rad}$. 它们的方位角分别为: 2.8rad , 2.6rad 和 0.8rad ; 俯仰角分别为: 0.1rad , 0.6rad 和 0.9rad . 和文献[10]中的实验相同, 固定源的极化角度, 仅对源的方向角进行 2 维的空间谱搜索. 为了充分体现算法的鲁棒性, 假定已知的极化角度有 +5% 的误差, 在该情况下 PB-MUSIC 和 LV-MUSIC 得到的空间谱搜索的结果如图

3 所示.从图 3 的结果可知,在源的极化参数有误差的情况下,PB-MUSIC 比 LV-MUSIC 具有更好的性能,它可以很好地分离出中间两个靠得比较近的源.

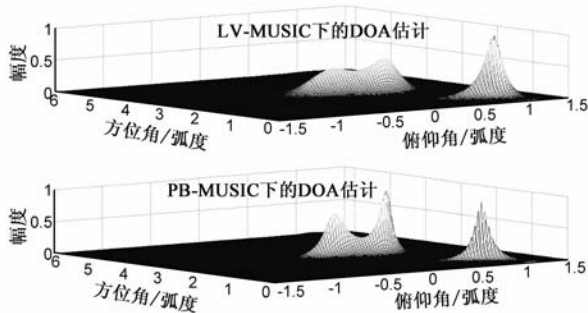


图3 LV-MUSIC和PB-MUSIC的空间谱

第二个实验比较两个算法在噪声不相关情况下的性能.假定一个电磁源入射到 5 个传感器构成的阵列上.电磁源的方位角、俯仰角、两个极化角分别为: π rad, 0.3 rad, 0.5 rad, 0.2 rad.仿真中采用了 300 次独立的实验,每次实验使用 1000 组采样数据.两种算法在不同信噪比下的方位角和俯仰角估计的均方误差(MS estimation error)如图 4 所示.从图中可以看出在噪声不相关情况下,PB-MUSIC 和 LV-MUSIC 具有相近的性能,LV-MUSIC 稍好.LV-MUSIC 性能略好的原因可能是由于在 LV-MODEL 的描述方式下,阵列接收数据矢量的长度是最长的,进而 LV-MODEL 协方差矩阵更完善的描述了信号的二阶统计特性.但是如文献[9,10]中分析,较长的数据矢量会使得协方差矩阵估计的运算量和存储空间都较大,带来计算上的复杂度.

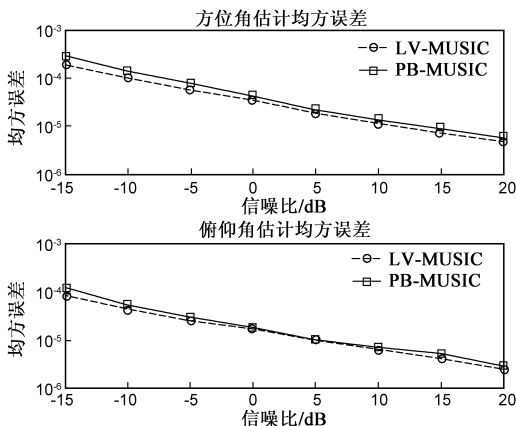


图4 噪声不相关下算法的性能对比

第三组实验比较算法在噪声相关情况下的性能.实验条件和实验二相同,但传感器的测量噪声是相关的并且满足 A1 的假设.在这样的情况下,两种算法的性能对比如图 5 所示.图 5 说明了在相关噪声的情况下,PB-MUSIC 的性能要远远的好于 LV-MUSIC 的性能,证实了本文算法在相关噪声情况下具有更好的鲁棒性.

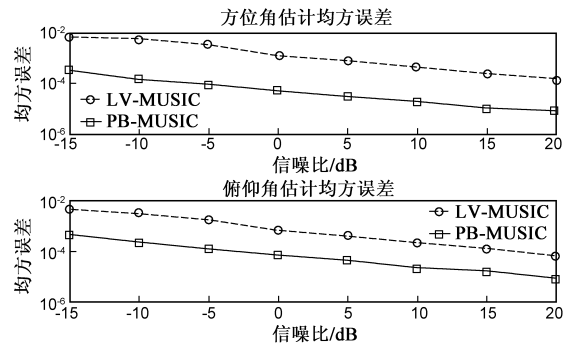


图5 噪声相关情况下的算法性能对比

7 结论

本文以双四元数为数学工具,为电磁矢量传感器及其阵列建立了一个物理意义明确的模型.该模型采用双四元数来整体描述阵列的输出,保留了阵列输出数据的矢量特性.基于模型,本文给出了相应的纯双四元数多重信号分离算法(PB-MUSIC).对协方差矩阵的理论分析表明:引入双四元数的数学工具使得本文算法具有“天然地”去除每个矢量传感器内部电场天线和磁场天线的噪声的相关性的能力,在抵抗相关噪声上比传统的算法表现出更好的鲁棒性.

参考文献

- [1] A Nehorai, E Paldi. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localization[J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 1994, 42(2): 376 - 398.
- [2] K T Wong, M D Zoltowski. Self-initiating MUSIC direction finding and polarization estimation in spatio-polarizational beamspace[J]. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, 2000, 48(8): 1235 - 1245.
- [3] D Rahamim, J Tabrikian, R Shavit. Source localization using vector sensor array in a multipath environment [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2004, 52(11): 3096 - 3103.
- [4] K T Wong, L Li, M D Zoltowski. Root-MUSIC-based Direction-finding and polarization estimation using diversely polarized possibly colocated antennas[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2004, 12(8): 129 - 132.
- [5] J Li. Direction and polarization estimation using arrays with small loops and short dipoles[J]. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, 1993, 41(3): 379 - 387.
- [6] H Krim, M Viberg. Two decades of array signal processing research: the parametric approach[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(4): 67 - 94.
- [7] R O Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, 1986, Ap- 34(3): 276 - 280.
- [8] 龚晓峰,刘志文,徐友根.电磁矢量传感器阵列信号波达

- 方向估计: 双模 MUSIC[J]. 电子学报, 2008, 36(9): 1698 - 1703.
- GONG Xiao-feng, LIU Zhi-wen, XU You-gen. Direction-Finding with electromagnetic vector-sensor array: dual-mode music [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(9): 1698 - 1703. (in Chinese)
- [9] S Miron, N Le Bihan, J Mars. Quaternion-music for vector-sensor array processing [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2006, 4(54): 1218 - 1229.
- [10] N Le Bihan, S Miron, J Mars. MUSIC algorithm for vector-sensors array using biquaternions [J]. IEEE Transaction on Signal Processing, 2007, 55(9): 4523 - 4533.
- [11] X F Gong, Z W Liu, Y. G. Xu. Quad-quaternion MUSIC for DOA estimation using electromagnetic vector sensors [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2008, 2008: 15 - 18.
- [12] Y Tian. Matrix theory over the complex quaternion algebra [DB/OL]. <http://arxiv.org/abs/math/0004005>, 2000 - 04 - 01.
- [13] S Sangwine, N Le Bihan. Quaternion Toolbox for Matlab [CP/DK]. <http://qtfm.sourceforge.net/>, 2009-03-13/2010-5-9.
- [14] H D Schütte, J Wenzel. Hypercomplex numbers in digital signal processing [A]. IEEE International Symposium on Circuits and Systems [C]. IEEE, 1990. 1557 - 1560.
- [15] T A Ell. Hypercomplex Spectral Transformation [D]. Minnesota: University of Minnesota, 1992.
- [16] J Ward. Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications [M]. New York: Kluwer Academic, 1997.
- [17] 王洪吉. 场方程的四元数形式 I [J]. 天津理工学院学报, 1993, 2: 14 - 19.
- [18] 杨河林. 试谈麦克斯韦方程的不同形式 [J]. 高等函授学报(自然科学版), 2002, 12(2): 17 - 19.
- [19] S O Rice. Envelopes of narrow-band signals [J]. Proceedings of the IEEE, 1982, 70(7): 692 - 699.

作者简介



李 旦 男, 1982 年 1 月出生于江苏省常州市. 分别于 2003 年和 2006 年在复旦大学电子工程系获得理学学士和硕士学位. 现为复旦大学电子工程系讲师. 主要研究方向为阵列信号处理.

E-mail: lidan@fudan.edu.cn



蒋景飞 男, 1985 年 9 月出生于四川省西昌市. 于 2008 年在复旦大学电子工程系获得理学学士学位. 硕士研究生, 主要研究方向为阵列信号处理.

E-mail: 082021030@fudan.edu.cn

张建秋 男, 1962 年生. 1996 年在哈尔滨工业大学电子测量及仪器获工学博士学位. 1999 年 1 月至 2002 年 7 月在英国格林威治大学工程学院工作. 现为复旦大学电子工程系教授, 博士生导师, IEEE 高级会员. 主要从事数字信号处理以及智能仪器系统的研究.

E-mail: jqzhang@fudan.ac.cn